Polynômes et polygones réguliers

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\mathscr{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Soit k un entier tel que $k \geqslant 3$. Les points $M_1, M_2, \dots, M_k$ sont les sommets d'un polygone *régulier de centre O* si ces points

- ▷ sont deux à deux distincts,
- ▷ apparaissent dans le sens trigonométrique (c'est-à-dire le sens contraire des aiguilles d'une montre) sur un même cercle de centre O, et
- ▷ vérifient l'égalité $M_1M_2 = M_2M_3 = \cdots = M_{k-1}M_k = M_kM_1$.

En particulier, pour $k = 3$, il s'agit d'un triangle équilatéral ; pour $k = 4$, il s'agit d'un carré.

Pour tout entier $d \geqslant 0$, une fonction P est un polynôme de *degré d* s'il existe des réels $a_0, a_1, \dots, a_d$ tels que $a_d \neq 0$ et

$$P(x) = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

pour tout réel x ; on pourra admettre que, pour un tel polynôme, l'équation $P(x) = 0$ admet au plus d solutions réelles.
Quant à elle, la fonction

$$P : x \mapsto 0$$

est appelée le *polynôme nul*.
Enfin, étant donné un polynôme P (nul ou non), on note $\mathscr{C}_P$ la courbe représentative de P dans le repère $\mathscr{R}$.

Partie A : Triangles équilatéraux

1) Soit P un polynôme de degré 1. Existe-t-il un triangle équilatéral dont les sommets appartiennent à $\mathscr{C}_P$?
2) On considère les points

$$A\left(1, \frac{\sqrt{3}}{3}\right),\ B\left(-1, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \text{ et } C\left(0, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right).$$

   a) Démontrer que A, B et C sont les sommets d'un triangle équilatéral de centre O.

   b) Démontrer que les points A, B et C appartiennent à la courbe représentative du polynôme

$$Q : x \mapsto \frac{\sqrt{3}}{3}\left(3x^2 - 2\right).$$

   c) Démontrer que les points A, B et C appartiennent à la courbe représentative du polynôme

$$R : x \mapsto \frac{\sqrt{3}}{3}\left(3x^2 - 2\right) + x\left(x^2 - 1\right).$$

   d) Démontrer que, pour tout entier $d \geqslant 2$, il existe un polynôme de degré d dont la courbe représentative contient les points A, B et C.

Partie B : Carrés de centre O

Dans les questions 3) et 4), on considère un polynôme P et un carré $ABCD$ de centre O dont les quatre sommets appartiennent à $\mathscr{C}_P$.

3) a) Exprimer les coordonnées des points B, C et D en fonction de celles de A. Démontrer que les abscisses de A, B, C et D sont distinctes et non nulles.

   b) Démontrer que P est non nul et que son degré vaut au moins 3.

4) On suppose dans cette question qu'il existe des réels a, b et c tels que

$$P : x \mapsto x^3 + ax^2 + bx + c.$$

   a) Démontrer que $a = 0$ et $c = 0$.

   b) Démontrer que les abscisses respectives de A, B, C et D sont solutions de l'équation

$$P(P(x)) + x = 0.$$

   c) Démontrer que le polynôme

$$Q\colon x \mapsto x^4 + 3bx^3 + 3b^2x^2 + b(b^2+1)x + b^2 + 1$$

   admet au moins deux racines positives distinctes.

   d) Démontrer que $b < 0$.

   e) On suppose qu'il existe deux réels α et β tels que $0 < \alpha < \beta$ et

$$Q(x) = (x-\alpha)^2(x-\beta)^2$$

   pour tout réel x. Démontrer qu'alors $b = -\sqrt{8}$, puis déterminer les valeurs de α et β.

5) a) Démontrer qu'il existe un polynôme P de degré 3 et un carré $ABCD$ de centre O dont les sommets appartiennent à $\mathscr{C}_P$.

   b) Pour quels entiers d existe-t-il un polynôme de degré d dont la courbe représentative contient les points A, B, C et D obtenus en question 5)a) ?

Partie C : Où l'on prouve que $d \geqslant k-1$

Soit $M_1M_2\cdots M_k$ un polygone régulier de centre O. On suppose dans cette question qu'il existe un polynôme P, de degré d, dont la courbe contient les points $M_1, M_2, \ldots, M_k$. On souhaite alors démontrer que $d \geqslant k-1$.

Pour tout i, on note (x_i, y_i) les coordonnées de M_i dans le repère $\mathscr{R}$.

6) a) Pourquoi peut-on supposer que x_1 est inférieur ou égal à $x_2, x_3, \ldots, x_k$ et que $y_1 \leqslant 0$?

   b) Démontrer que les abscisses x_i sont deux à deux distinctes et que les ordonnées y_i sont non nulles.

   c) Démontrer qu'il existe un nombre réel $R > 0$ et un nombre réel θ appartenant à l'intervalle $]0, \pi/k[$ tels que $x_1 = -R\cos(\theta)$ et $y_1 = -R\sin(\theta)$.

   d) Démontrer que $x_1 < x_k < x_2 < x_{k-1} < x_3 < x_{k-2} < \cdots$

   e) Démontrer que P admet une racine sur chacun des $k-1$ intervalles

$$]\,x_1, x_k\,[\,,\ ]\,x_k, x_2\,[\,,\ ]\,x_2, x_{k-1}\,[\,,\ ]\,x_{k-1}, x_3\,[\,,\ ]\,x_3, x_{k-2}\,[\,,\ \ldots$$

   f) En conclure que $d \geqslant k-1$.

Partie D : Où l'on prouve que tout entier $d \geqslant k-1$ convient

On suppose dans cette partie que les abscisses x_i sont deux à deux distinctes et on veut démontrer que, pour tout entier $d \geqslant k-1$, il existe un polynôme de degré d dont la courbe contient les points $M_1, M_2, \ldots, M_k$.

7) Soit a et b deux réels. Dans le repère $\mathscr{R}$, on considère les points

$$A(\cos(a), \sin(a)),\ B(\cos(a+b), \sin(a+b)) \text{ et } C(-\sin(a), \cos(a)).$$

   a) Démontrer que le repère $\mathscr{R}' = (O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$ est orthonormé.

   b) Quelles sont les coordonnées du point B dans le repère $\mathscr{R}'$?

   c) En déduire que

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)\ ;$$
$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b).$$

8) On considère la suite de polynômes définie par $T_0 : x \mapsto 1$, $T_1 : x \mapsto x$ et

$$T_{n+2} : x \mapsto 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$$

pour tout entier $n \geqslant 0$.

   a) Démontrer que $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ pour tout entier $n \geqslant 0$ et tout réel θ.

   b) Soit θ un réel, et soit $\ell \geqslant 1$ et $j \geqslant 0$ deux entiers. Démontrer que

$$T_{\ell-1}\left(\cos\left(\theta + \frac{2j\pi}{\ell}\right)\right) - \cos(\ell\theta)\cos\left(\theta + \frac{2j\pi}{\ell}\right) = \sin(\ell\theta)\sin\left(\theta + \frac{2j\pi}{\ell}\right).$$

   c) Démontrer que, pour tout entier $d \geqslant k-1$, il existe un polynôme de degré d dont la courbe contient les points $M_1, M_2, \ldots, M_k$.